Problèmes variationnels invariants par transformation conforme en dimension 2

Frédéric Hélein,

Le 29 janvier 2001

1 Introduction

Soit u une fonction définie sur un domaine Ω inclus dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonctionnelle de Dirichlet

$$\mathcal{E}[u] := \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2 \right) dxdy = \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy$$

est un exemple bien connu de problème variationnel invariant par transformation conforme. Ses points critiques sont les fonctions harmoniques, solutions de l'équation $\Delta u = 0$ et sont étroitement reliés aux fonctions holomorphes, puisque u est harmonique si et seulement si $x + iy \longmapsto \partial_x u - i\partial_y u$ est holomorphe. L'étude des surfaces minimales dans l'espace de dimension 3 a conduit assez naturellement les mathématiciens à considérer la même fonctionnelle pour des applications d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^3$. En effet, pour toute application $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, on a toujours $\mathcal{E}[u] \geq \mathcal{A}[u]$, où $\mathcal{A}$ est la fonctionnelle aire (rendue extrémale pour les surfaces minimales), définie par

$$\mathcal{A}[u] := \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y} \right| dxdy.$$

Et de plus, $\mathcal{A}[u] = \mathcal{E}[u]$ si u est conforme. Or la fonctionnelle $\mathcal{E}$ possède des propriétés de compacité bien meilleures que $\mathcal{A}$. Cela a permis à J. Douglas et T. Radó en 1930 de résoudre le problème de Plateau. Le succès de cette approche a été confirmé par les travaux de C.B. Morrey: on peut construire des surfaces minimales dans des variétés riemanniennes $(\mathcal{N}, g)$ en cherchant les points critiques - appelés *applications harmoniques* - de

$$\mathcal{E}[u] := \int_\Omega g_{ij}(u) \left(\frac{\partial u^i}{\partial x}\frac{\partial u^j}{\partial x} + \frac{\partial u^i}{\partial y}\frac{\partial u^j}{\partial y} \right) dxdy,$$

qui généralise la fonctionnelle de Dirichlet classique donnée plus haut. On peut également modifier $\mathcal{E}[u]$ en y ajoutant un terme du type $\int_\Omega u^\star\omega$, où ω est une deux-forme définie sur $\mathcal{N}$ et $u^\star\omega$ son image inverse par u. Si $\mathcal{N}$ est de dimension 3, on obtient ainsi une fonctionnelle dont la théorie variationnelle produit des surfaces à courbure moyenne prescrite (égale au rapport entre $d\omega$ et la forme de de volume riemannien sur $\mathcal{N}$), cf [Hé].

Toutes ces actions sont des exemples de fonctionnelles invariantes par le groupe des transformations conformes de $\mathbb{R}^2$. Ce sont même les seules possibles, lorsque l'on se restreint à des fonctionelles du type $\int_\Omega L(u, \nabla u)dxdy$, en supposant que $\xi \mapsto L(u, \xi)$ est quadratique.

L'intérêt de ce type de fonctionnelle est aujourd'hui bien établi en physique mathématique, puisque la théorie des cordes et des supercordes est bâtie sur une quantification de $\mathcal{E}$ et de ses généralisations supersymétriques. En particulier, comme il a été montré A. M. Polyakov, l'énergie $\mathcal{E}$ s'avère être plus appropriée que l'aire $\mathcal{A}$ pour le calcul d'intégrales fonctionnelles.

Notre but ici, est de décrire une classe générale de problèmes variationnels en dimension 2 qui sont invariants par le groupe des transformations conformes de $\mathbb{C}$.

Nous verrons en particulier qu'une géométrie, que nous appelons $\mathbb{C}$-*finslerienne*, similaire à la géométrie finslerienne est associée de façon naturelle à ces problèmes. Essentiellement une métrique $\mathbb{C}$-finslerienne est la donnée d'une application $F : T\mathcal{N}^{\mathbb{C}} \longrightarrow [0, \infty[$ homogène de degré deux sur chaque fibre, c'est à dire telle que $F(y, \lambda z) = |\lambda|^2 F(y, z)$, $\forall y \in \mathcal{N}$, $\forall z \in T_y\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. A travers une analyse succincte de cette géométrie, nous verrons qu'apparemment elle partage nombre de propriétés avec la géométrie finslerienne classique.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons aux formulations hamiltoniennes pour les problèmes invariants par transformations conformes. Rappelons qu'en calcul des variations à plusieurs variables, les possibilités sont multiples. Nous explorerons d'abord brièvement le formalisme de De Donder-Weyl, puis nous nous intéresserons au formalisme de Carathéodory. Le lecteur un peu spécialiste de cette théorie constatera que j'ai introduit un paramètre supplémentaire, noté w (qui doit être remplacé par 0 si on veut comparer ce qui est écrit ici avec, par exemple, l'exposé dans [Ru]). Cela a été motivé par le fait que l'analogue de la transformation de Legendre pour la théorie de Carathéodory est en général mal défini, sans ce degré de liberté supplémentaire. Pour des développements supplémentaires concernant ces différents types de formalisme hamiltonien, voir [HK].

Remerciements Je tiens à remercier Joseph Kouneiher pour les discussions que j'ai eu avec lui sur ce sujet et ses encouragements.

2 Caractérisation

2.1 Etude locale

Nous cherchons, parmi tous les lagrangiens $L(t, u, du)$ continument différentiables, ceux qui sont tels que la fonctionnelle définie par

$$\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L(t, u, du) dt^1 dt^2$$

est invariante par le groupe des transformations conformes de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Au préalable, il faut rappeler le sens que nous donnons à cette notion d'invariance. Considérons une famille de difféomorphismes locaux Ψ_s de $\mathbb{R}^2$, à un paramètre s, qui forme un groupe pour la composition. Ψ_s est le flot d'un champ de vecteurs X défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant l'adhérence de Ω. Cela entraîne en particulier que pour s proche de 0, on a

$$\Psi_s(t) = t + sX(t) + o(s). \tag{1}$$

L'image par Ψ_s de Ω est un ouvert Ω_s, différent de Ω en général. Soit maintenant une application u de Ω vers $\mathbb{R}^n$: nous dirons qu'elle est transformée en u_s si le graphe de u_s est l'image du graphe de u par la transformation $(t, y) \longmapsto (\Psi_s(t), y)$ agissant sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$. Donc le domaine de définition de u_s sera $\Omega_s = \Psi_s(\Omega)$, et u_s satisfait à

$$u_s \circ \Psi_s = u, \forall s. \tag{2}$$

Nous dirons que la fonctionnelle $\mathcal{L}$ est invariante par X si et seulement si pour tout sous-domaine $\omega \subset \Omega$,

$$\mathcal{L}_{\Psi_s(\omega)}[u_s] = \mathcal{L}_\omega[u].$$

Une façon d'écrire cette relation est de faire le changement de variable $t = \Psi_s(\tau)$, pour $\tau \in \omega$ dans l'intégrale de gauche. Cela donne

$$\int_\omega L\left(\Psi_s(\tau), u_s(\Psi_s(\tau)), du_s(\Psi_s(\tau))\right) det(d\Psi_s(\tau))d\tau = \mathcal{L}_\omega[u].$$

Or, en dérivant la relation (2), on obtient:

$$du_s(\Psi_s(\tau)).d\Psi_s(\tau) = du(\tau),$$

d'où

$$du_s(\Psi_s(\tau)) = du(\tau).d\Psi_s(\tau)^{-1}.$$

Donc, en utilisant cette relation et (2), on obtient

$$\int_\omega L\left(\Psi_s(\tau), u(\tau), du(\tau).d\Psi_s(\tau)^{-1}\right) \det(d\Psi_s(\tau))d\tau = \mathcal{L}_\omega[u]. \tag{3}$$

Nous pouvons déduire une version infinitésimale de cette relation, en supposant que s est petit et en développant au premier ordre:

$$\mathcal{L}_\omega[u] = \int_\omega L\left(t + sX(t), u(t), du(t).(\mathbb{1} - sdX(t))\right) \det(\mathbb{1} + sdX(t))dt + o(s).$$

Et comme cette relation doit être valable pour tout ω, nécessairement, $\forall (t,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times M(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$,

$$L\left(t + sX(t), y, z.(\mathbb{1} - sdX(t))\right)(1 + s\text{div}X(t)) = L(t,y,z) + o(s). \tag{4}$$

De façon équivalente: $\forall (t,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times M(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$,

$$X^\alpha(t)\frac{\partial L}{\partial t^\alpha}(t,y,z) - \frac{\partial L}{\partial z^i_\alpha}(t,y,z)z^i_\beta\frac{\partial X^\beta}{\partial t^\alpha}(t) + L(t,y,z)\frac{\partial X^\alpha}{\partial t^\alpha}(t) = 0. \tag{5}$$

La question est de trouver les conditions sur L pour que cette relation soit vraie pour tout groupe à un paramètre d'applications conformes Ψ_s. En testant (5) avec, comme groupe de déformations les translations de $\mathbb{R}^2$, engendrées par les champs de vecteur constants, on obtient $\frac{\partial L}{\partial t^\alpha} = 0$ partout, à savoir que L ne dépend pas de t. Ainsi (5) se simplifie en

$$\left(\frac{\partial L}{\partial z^i_\alpha}(y,z)z^i_\beta - L(y,z)\delta^\alpha_\beta\right)\frac{\partial X^\beta}{\partial t^\alpha}(t) = 0. \tag{6}$$

De manière générale, chaque Ψ_s satisfait les équations de Cauchy-Riemann $\partial_{t^1}\Psi^1_s - \partial_{t^2}\Psi^2_s = \partial_{t^2}\Psi^1_s + \partial_{t^1}\Psi^2_s = 0$, donc, d'après (1), X est aussi holomorphe, à savoir,

$$\partial_{t^1} X^1 - \partial_{t^2} X^2 = \partial_{t^2} X^1 + \partial_{t^1} X^2 = 0.$$

Et L satisfait (6) pour tout champ de vecteur holomorphe si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial L}{\partial z^i_1}(y,z) z^i_1 + \frac{\partial L}{\partial z^i_2}(y,z) z^i_2 & = & 2L(y,z) \\ \frac{\partial L}{\partial z^i_1}(y,z) z^i_2 - \frac{\partial L}{\partial z^i_2}(y,z) z^i_1 & = & 0. \end{array} \right. \tag{7}$$

Nous pouvons exprimer la condition (7) de deux façons différentes. Premièrement, nous définissons le *tenseur hamiltonien*

$$H^\alpha_\beta(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial t^\beta} \frac{\partial L}{\partial z^i_\alpha}(t, u(t), du(t)) - \delta^\alpha_\beta L(t, u(t), du(t)),$$

généralisant l'hamiltonien ou l'énergie totale associée à un problème variationnel de dimension 1. Et il est clair que (7) équivaut aux relations $H^1_1 + H^2_2 = H^1_2 - H^2_1 = 0$, signifiant que le tenseur hamiltonien est symétrique et à trace nulle.

Deuxièmement, en identifiant l'ensemble des variables $\{z^i_\alpha / i = 1, ..., n; \alpha = 1, 2\}$ avec $\mathbb{C}^n$, on peut définir le lagrangien comme une fonction F des variables $(y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n$ en notant

$$L(u, du) = F(u, \frac{\partial u}{\partial t^1} + i \frac{\partial u}{\partial t^2}).$$

Fixons $y \in \mathbb{R}^n$, $z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}^n$ et différentions la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & F(y, \lambda z) \end{array}$$

par rapport à $\lambda = a + ib$. En utilisant (7), il vient

$$\begin{array}{rcl} dF(y,\lambda z) & = & \left(\frac{\partial L}{\partial z^i_1}(y,\lambda z) z^i_1 + \frac{\partial L}{\partial z^i_2}(y,\lambda z) z^i_2 \right) da + \left(\frac{\partial L}{\partial z^i_2}(y,\lambda z) z^i_1 - \frac{\partial L}{\partial z^i_1}(y,\lambda z) z^i_2 \right) db \\ & = & 2L(y,\lambda z) \frac{ada + bdb}{a^2 + b^2} = F(y, \lambda z) \frac{d|\lambda|^2}{|\lambda|^2}. \end{array}$$

d'où $\frac{d}{d\lambda}\left(|\lambda|^{-2} F(y,\lambda z) \right) = 0$, c'est à dire $|\lambda|^{-2} F(y, \lambda z)$ ne dépend pas de λ. Nous en déduisons le résultat suivant.

Théorème 1 *L'action* $\mathcal{L}[u] := \int L(t, u(t), du(t)) dt^1 dt^2$ *est invariante par transformations conformes si et seulement si* $L(t, y^j, z^j_\alpha) = F(y^j, z^j_1 + iz^j_2)$*, où* $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfait* $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$

$$F(y, \lambda z) = |\lambda|^2 F(y, z). \tag{8}$$

2.2 Lois de conservation

L'action $\mathcal{L}$ étant en particulier invariante par translations, le théorème de Noether permet de déduire que le tenseur hamiltonien est à divergence nulle: $\frac{\partial H^\alpha_\beta}{\partial x^\alpha} = 0$, pour $\beta = 1, 2$. Comme de plus H^α_β est symétrique à trace nulle, nous pouvons reformuler cette loi de conservation en introduisant la *différentielle de Hopf généralisée* $\mathcal{Q} := f(dz)^2$, avec

$$\begin{aligned} f &= \left((H^1_1 - H^2_2) - i(H^1_2 + H^2_1)\right) \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial z^j_1}(u, du)\frac{\partial u^j}{\partial t^1} - \frac{\partial L}{\partial z^j_2}(u, du)\frac{\partial u^j}{\partial t^2}\right) - i\left(\frac{\partial L}{\partial z^j_1}(u, du)\frac{\partial u^j}{\partial t^2} + \frac{\partial L}{\partial z^j_2}(u, du)\frac{\partial u^j}{\partial t^1}\right), \end{aligned}$$

et en écrivant que $\mathcal{Q}$ est holomorphe:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

2.3 Un point de vue géométrique

Nous pouvons aisément généraliser ce qui précède à des applications à valeurs dans une variété $\mathcal{N}$. L'action $\int L(t, u, \partial_1 u, \partial_2 u) dt^1 dt^2$ est invariante par transformation conforme si et seulement si $L(t, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = F(u, \partial_1 u + i\partial_2 u)$, où F est cette fois une application définie sur le fibré tangent complexifié

$$T\mathcal{N}^{\mathbb{C}} = T\mathcal{N} \otimes \mathbb{C} = \{(y, z)/y \in \mathcal{N}, z \in T_y\mathcal{N} \otimes \mathbb{C}\},$$

telle que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $F(y, \lambda z) = |\lambda|^2 F(y, z)$.

En imitant la définition d'une variété de Finsler, nous sommes naturellement conduits à introduire ce qui suit:

Définition 1 *Une* pseudo-variété $\mathbb{C}$-finslerienne *est une variété différentielle $\mathcal{N}$ munie d'une application $F : T\mathcal{N}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ F(y, \lambda z) = |\lambda|^2 F(y, z).$$

Une variété $\mathbb{C}$-finslerienne *est une pseudo-variété $\mathbb{C}$-finslerienne telle que F satisfait les conditions suivantes: F est deux fois différentiable sur $T\mathcal{N}^{\mathbb{C}} \setminus (\mathcal{N} \times \{0\})$ et il existe une constante $c > 0$, telle que $\forall (y, z) \in T\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$, $\forall v = v_1 + iv_2 \in T_y\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$,*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^i_\alpha \partial z^j_\beta}(y, z) v^i_\alpha v^j_\beta \geq c|v|^2. \tag{9}$$

Les conséquences de la "condition d'ellipticité" (9) seront données plus loin. Si $\mathcal{N}$ est une variété $\mathbb{C}$-finslerienne, pour toute surface de Riemann Σ et pour toute application $u : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}$, nous pouvons définir son "énergie"

$$\mathcal{E}[u] = \int_\Sigma F(u, 2\overline{\partial} u) d\sigma,$$

où, dans toute coordonnée locale holomorphe $t = t^1 + it^2$ sur Σ, $2\overline{\partial} u = \partial_1 u + i\partial_2 u$ et $d\sigma = dt^1 \wedge dt^2$.

Exemple 1 *Toute variété riemannienne $\mathcal{N}$ est une variété $\mathbb{C}$-finslerienne. Si g est le tenseur métrique, la fonction F correspondante est juste $F(y,z) = \frac{1}{2}g_{ij}(y)(z_1^i z_1^j + z_2^i z_2^j)$. La même construction à partir d'une variété pseudo-riemannienne (telle que g_{ij} soit une métrique de Minkowski) donne une pseudo variété $\mathbb{C}$-finslerienne. Enfin si, en plus du tenseur métrique g_{ij}, on se donne un tenseur antisymétrique ω_{ij} sur $\mathcal{N}$, on obtient une variété $\mathbb{C}$-finslerienne avec $F(y,z) = \frac{1}{2}\left(g_{ij}(y)(z_1^i z_1^j + z_2^i z_2^j) + \omega_{ij}(y)(z_1^i z_2^j - z_2^i z_1^j)\right)$.*

3 La transformée de Legendre

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que F est deux fois différentiable sur $T\mathcal{N}^{\mathbb{C}} \setminus (\mathcal{N} \times \{0\})$ et nous noterons, pour $\alpha, \beta = 1, 2$ et $i, j = 1, ..., n$,

$$G_{ji}^{\beta\alpha}(y,z) = G_{ij}^{\alpha\beta}(y,z) := \frac{\partial^2 F}{\partial z_\alpha^i \partial z_\beta^j}(y,z).$$

3.1 Hypothèse de Legendre

Nous aurons besoin dans la suite, de supposer

Hypothèse de Legendre globale *Pour tout $y \in \mathcal{N}$ et pour tout $p = p^1 + ip^2 \in T_y^\star \mathcal{N}^{\mathbb{C}}$, il existe un unique $z = z_1 + iz_2 \in T_y\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$, tel que*

$$\frac{\partial F}{\partial z_1^j}(y,z) + i\frac{\partial F}{\partial z_2^j}(y,z) = p_j^1 + ip_j^2. \tag{10}$$

Cette propriété peut être montrée localement, en utilisant le théorème d'inversion locale, si l'on suppose ce qui suit:

Hypothèse de Legendre locale *Pour tout $a = a^1 + ia^2 \in T_y^\star \mathcal{N}^{\mathbb{C}}$, il existe un unique $v = v_1 + iv_2 \in T_y\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$, tel que*

$$G_{ij}^{\alpha\beta}(y,z)v_\beta^j = a_i^\alpha. \tag{11}$$

Mais dans le cas des variétés $\mathbb{C}$-finsleriennes, la condition d'ellipticité (9) entraîne l'hypothèse de Legendre globale (10). En effet, cela implique que, pour tout $y \in \mathcal{N}$ fixé, la fonction $z \longmapsto F(y,z)$ est strictement convexe, puisqu'alors, pour tout $v, w \in T_y\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ la dérivée seconde de $l(s) = F(y, (1-s)v + xw)$ est $l''(s) \geq c|w-v|^2$. Donc, pour tout $p \in T_y^\star\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$, une unique solution à (10) est obtenue en minimisant $z \longmapsto F(y,z) - p_i^\alpha z_\alpha^i$. De plus, par homogénéité, $F(y,0) = \frac{\partial F}{\partial z_\alpha^j}(y,0) = 0$ et donc la convexité de F entraîne $F(y,z) \geq 0$, $\forall y, z$.

3.2 Impulsions généralisées

Nous notons $2\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} : T\mathcal{N}^{\mathbb{C}} \longrightarrow T^\star\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ l'application définie par

$$2\frac{\partial F}{\partial \overline{z}^j}(y,z) := \frac{\partial F}{\partial z_1^j}(y,z) + i\frac{\partial F}{\partial z_2^j}(y,z).$$

Ses parties réelles et imaginaires sont les impulsions généralisées. Nous faisons ici l'hypothèse de Legendre globale. Alors nous définissons $\psi_1(y, p^1, p^2) := z_1$ et $\psi_2(y, p^1, p^2) := z_2$ comme étant les solutions de l'équation (10). Nous notons $\Psi : T^\star\mathcal{N}^\mathbb{C} \longrightarrow T\mathcal{N}^\mathbb{C}$ l'application définie par

$$\Psi(y, p^1 + ip^2) := \psi_1(y, p^1, p^2) + i\psi_2(y, p^1, p^2).$$

Donc Ψ est l'application inverse de $2\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$.

Lemme 1 *Les applications* $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$ *et* Ψ *satisfont les relations suivantes:*
$\forall (y, z) \in T\mathcal{N}^\mathbb{C}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(y, \lambda z) = \lambda \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(y, z), \tag{12}$$

$\forall (y, p) \in T^\star\mathcal{N}^\mathbb{C}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\Psi(y, \lambda p) = \lambda \Psi(y, p). \tag{13}$$

Preuve Montrons d'abord (12). Fixons $\lambda \in \mathbb{C}$ et dérivons la relation (8) par rapport à $\overline{z}^j$. Il vient:

$$\overline{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \overline{z}^j}(y, \lambda z) = \frac{\partial F(y, \lambda z)}{\partial \overline{z}^j} = |\lambda|^2 \frac{\partial F}{\partial \overline{z}^j}(y, z).$$

En simplifiant par $\overline{\lambda}$, cela donne (12). A présent, puisque Ψ est l'inverse de $2\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$, on a, notant $z = \Psi(y, p)$,

$$\Psi(y, \lambda p) = \Psi(y, \lambda 2\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(y, z)) = \Psi(y, 2\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(y, \lambda z)) = \lambda z = \lambda \Psi(y, p),$$

ce qui donne (13). *CQFD.*

4 Géométrie $\mathbb{C}$-finslerienne

La géométrie finslerienne est obtenue en définissant une fonction F sur le fibré tangent $T\mathcal{N}$, à valeurs dans les réels positifs, qui est homogène de degré 1, c'est à dire $F(y, \lambda v) = |\lambda| F(y, v)$, pour tout $(y, v) \in T\mathcal{N}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Elle consiste en une vision géométrique des problèmes variationnels à une variable invariants par les difféomorphismes de $\mathbb{R}$ (cf [Ch]). La géométrie $\mathbb{C}$-finslerienne, que nous allons décrire plus bas, modélise de façon géométrique les problèmes variationnels à deux variables invariants par transformation conforme et se présente comme une version complexe de le géométrie finslerienne. Par exemple, une belle construction de la géométrie finslerienne consiste à définir sur le fibré tangent $T\mathcal{N}$ un tenseur métrique (un produit scalaire sur chaque $T_y\mathcal{N}$) $g_{ij}(y, v) = \frac{1}{2}(\partial^2/\partial v^i \partial v^j)F^2(y, v)$. Ce produit scalaire est homogène de degré zéro, c'est à dire $g_{ij}(y, \lambda v) = \lambda g_{ij}(y, v)$. Cela signifie qu'il est défini sur le fibré projectif tangent $PT\mathcal{N}$. On fabrique ainsi une métrique sur chaque fibre du fibré $P\mathcal{F}_1$, dont la variété base est $PT\mathcal{N}$ et la fibre en un point $(y, \mathbb{R}v)$ est $T_y\mathcal{N}$. Dans ce qui suit, nous présentons une construction similaire en géométrie $\mathbb{C}$-finslerienne.

4.1 Tenseurs métriques

Nous différentions la relation (12) une fois de plus, par rapport aux variables z. Introduisons la notation

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1^k} - i\frac{\partial}{\partial z_2^k}\right),$$

et appliquons cet opérateur à (12), Il vient

$$\lambda\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{z}^j \partial z^k}(y, \lambda z) = \lambda\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{z}^j \partial z^k}(y, z).$$

En simplifiant par λ et en identifiant les parties réelles et imaginaires, nous trouvons

$$\begin{aligned} G_{jk}^{11}(y, \lambda z) + G_{jk}^{22}(y, \lambda z) &= G_{jk}^{11}(y, z) + G_{jk}^{22}(y, z) \\ G_{jk}^{12}(y, \lambda z) - G_{jk}^{21}(y, \lambda z) &= G_{jk}^{12}(y, z) - G_{jk}^{21}(y, z). \end{aligned} \tag{14}$$

Nous sommes ainsi conduits à poser

$$\begin{aligned} g_{jk}(y, z) &= \tfrac{1}{2}\left(G_{jk}^{11}(y, z) + G_{jk}^{22}(y, z)\right) \\ \omega_{jk}(y, z) &= \tfrac{1}{2}\left(G_{jk}^{12}(y, z) - G_{jk}^{21}(y, z)\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Il est immédiat que g_{jk} est symétrique, ω_{jk} est antisymétrique et que l'on a $g_{jk}(y, z)v^j v^k \geq c|v|^2$. A partir de g_{jk} et de ω_{jk}, on peut former le tenseur $h_{jk} := g_{jk} - i\omega_{jk}$, qui satisfait $\overline{h_{kj}} = h_{jk}$, c'est à dire, qui est hermitien. Notons $\mathcal{F}$ le fibré image inverse de $T\mathcal{N}$ par la fibration $T\mathcal{N}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{N}$. Nous avons obtenu le résultat suivant.

Lemme 2 et définition *Les tenseurs g et ω donnés par (15) définissent une "métrique hermitienne"*

$$h_{jk} = g_{jk} - i\omega_{jk} = 2\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{z^j} \partial z^k} \text{ sur } \mathcal{F}.$$

Cette métrique est homogène complexe de degré zéro sur chaque $T_y\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$. En d'autres termes, nous introduisons $PT\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$, le fibré dont la fibre en y est l'espace projectif complexe $PT_y\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ (le quotient de $T\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ par $\mathbb{C}$). Nous notons $P\mathcal{F}$ le fibré image inverse de $T\mathcal{N}$ par la projection $PT\mathcal{N}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{N}$. Alors le tenseur h définit une métrique hermitienne sur $P\mathcal{F}$.

Nous allons à présent voir qu'il existe des relations entre les "vitesses généralisées" $z \in T_y\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$, les impulsions généralisées $p \in T_y^\star\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ et la métrique hermitienne $g - i\omega$ similaires à celles de la géométrie riemannienne. Repartons de (7), que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\frac{1}{2}\overline{p}_j z^j = \frac{\partial F}{\partial z^j}(y, z)z^j = F(y, z). \tag{16}$$

Dérivons (16) par rapport à $\overline{z}^k$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^j \partial \overline{z}^k}(y, z)z^j = \frac{\partial F}{\partial \overline{z}^k}(y, z).$$

Remarquant que $\frac{\partial^2 F}{\partial z^j \partial \overline{z}^k} = \frac{1}{2}(g_{jk} + i\omega_{jk})$, nous en déduisons

$$(g_{jk} + i\omega_{jk})(z_1^j + iz_2^j) = 2\frac{\partial F}{\partial \overline{z}^k}(y,z) = (p_k^1 + ip_k^2). \tag{17}$$

Enfin, utilisant (16) et (17), on obtient:

$$\begin{aligned} F(y,z) &= \tfrac{1}{2}\left(p_k^1 - ip_k^2\right)\left(z_1^k + iz_2^k\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(g_{jk} - i\omega_{jk}\right)(y,z)\left(z_1^j - iz_2^j\right)\left(z_1^k + iz_2^k\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(g_{jk} - i\omega_{jk}\right)(y,z)\left((z_1^j z_1^k + z_2^j z_2^k) + i(z_1^j z_2^k - z_2^j z_1^k)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(g_{jk}(y,z)\left(z_1^j z_1^k + z_2^j z_2^k\right) + \omega_{jk}(y,z)\left(z_1^j z_2^k - z_2^j z_1^k\right)\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Remarque 1 *On a aussi* $F(y,z) = \frac{1}{2}h_{jk}(y,z)\overline{z^j}z^k$.

Il est maintenant possible de reformuler l'action d'une application $u : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}$ de la façon suivante. Nous supposons que $\overline{\partial}u(t) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t^1} + i\frac{\partial u}{\partial t^2}\right)$ ne s'annule nulle part. Nous définissons l'unique relèvement $Pu : \Sigma \longrightarrow PT\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ de u qui soit *horizontal*, c'est à dire:

$$\forall t \in \Sigma,\ Pu(t) = (u(t), \mathbb{C}\overline{\partial}u(t)), \tag{19}$$

où $\mathbb{C}\overline{\partial}u(t)$ est la droite complexe dans $T_{u(t)}\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ engendrée par $\overline{\partial}u(t)$. Alors

Lemme 3 *L'action de* $u : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}$ *est égale à l'intégrale*

$$\mathcal{E}[u] = \int_\Sigma \frac{1}{2}g_{jk}(Pu)(\partial_1 u^j \partial_1 u^k + \partial_2 u^j \partial_2 u^k)dt^1 \wedge dt^2 + \frac{1}{2}\omega_{jk}(Pu)du^j \wedge du^k.$$

Dans cette dernière formule, l'action apparaît comme la somme d'une intégrale de Dirichlet et d'une intégrale $\int_\Sigma Pu^\star\omega$, où $\omega = \frac{1}{2}\omega_{jk}(y,\mathbb{C}z)dy^j \wedge dy^k$. Bien évidemment, Il faut faire attention que tout cela n'est valable que lorsque la condition d'horizontalité (19) sur Pu est vérifiée.

4.2 Equation d'Euler-Lagrange

Ecrivons les équations vérifiées par les points critiques dans notre formalisme. Nous partons de

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial z_\alpha^j}(u, 2\overline{\partial}u)\right) = \frac{\partial F}{\partial y^j}(u, 2\overline{\partial}u),$$

qui donne en développant:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_\alpha^j \partial z_\beta^k}\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_\alpha^j \partial y^k}\frac{\partial u^k}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial F}{\partial y^j} = 0. \tag{20}$$

Pour interpréter cette relation, nous dérivons les relations (17) et (18) par rapport y. Pour (18) ou $F(y,z) = \frac{1}{2}h_{kl}(y,z)\overline{z^k}z^l$, on obtient:

$$\frac{\partial F}{\partial y^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{kl}}{\partial y^j}\overline{z^k}z^l. \tag{21}$$

Et pour (17) ou $2\frac{\partial F}{\partial \overline{z^j}} = h_{jl}z^l$,

$$2\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{z^j}\partial y^k} = \frac{\partial h_{jl}}{\partial y^k} z^l,$$

relation qui entrane, notant $z^k = \frac{\partial u^k}{\partial t^1} + i\frac{\partial u^k}{\partial t^2}$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^j_\alpha \partial y^k}\frac{\partial u^k}{\partial t^\alpha} = 2Re\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{z^j}\partial y^k}\overline{z^k}\right) = Re\left(\frac{\partial h_{jl}}{\partial y^k} z^l \overline{z^k}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{jl}}{\partial y^k} z^l\overline{z^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial h_{lj}}{\partial y^k}\overline{z^l} z^k. \qquad (22)$$

Donc, utilisant (21) et (22), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial z^j_\alpha \partial y^k}\frac{\partial u^k}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial F}{\partial y^j} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial h_{jl}}{\partial y^k} z^l\overline{z^k} + \frac{\partial h_{lj}}{\partial y^k}\overline{z^l} z^k - \frac{\partial h_{kl}}{\partial y^j}\overline{z^k} z^l\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{jl}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial y^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial y^j}\right](z^k_1 z^l_1 + z^k_2 z^l_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \omega_{jl}}{\partial y^k} + \frac{\partial \omega_{kj}}{\partial y^l} + \frac{\partial \omega_{lk}}{\partial y^j}\right](z^k_1 z^l_2 - z^k_2 z^l_1).\end{aligned} \qquad (23)$$

Nous en déduisons que l'équation (20) peut s'écrire

$$g^{jm} G^{\alpha\beta}_{jk}\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} + \Gamma^m_{kl}(z^k_1 z^l_1 + z^k_2 z^l_2) - \frac{1}{2}g^{jm}(d\omega)_{jkl}(z^k_1 z^l_2 - z^k_2 z^l_1) = 0, \qquad (24)$$

o

$$\Gamma^m_{kl} = \frac{1}{2}g^{jm}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial y^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial y^j}\right)$$

et

$$(d\omega)_{jlk} = \frac{\partial \omega_{jl}}{\partial y^k} + \frac{\partial \omega_{kj}}{\partial y^l} + \frac{\partial \omega_{lk}}{\partial y^j}.$$

Enfin, il est possible d'expliciter différemment le terme d'ordre 2 dans l'équation d'Euler-Lagrange, en introduisant les tenseurs symétriques a_{jk} et b_{jk} donnés par

$$a_{jk} - ib_{jk} := \frac{1}{2}\left(G^{11}_{jk} - G^{22}_{jk}\right) - \frac{i}{2}\left(G^{12}_{jk} + G^{21}_{jk}\right) = 2\frac{\partial^2 F}{\partial z^j \partial z^k}, \qquad (25)$$

tels que

$$G^{11}_{jk} = g_{jk} + a_{jk},\ G^{12}_{jk} = \omega_{jk} + b_{jk},\ G^{21}_{jk} = -\omega_{jk} + b_{jk},\ G^{22}_{jk} = g_{jk} - a_{jk}.$$

En effet, on a alors

$$g^{jm} G^{\alpha\beta}_{jk}\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} = \Delta u^m + g^{jm}a_{jk}(\partial_1^2 - \partial_2^2)u^k + 2g^{jm}b_{jk}\partial_1\partial_2 u^k,$$

o $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial t^1}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial t^2}$. Donc l'équation d'Euler est dans ces notations

$$\Delta u^m + g^{jm}a_{jk}(\partial_1^2 - \partial_2^2)u^k + 2g^{jm}b_{jk}\partial_1\partial_2 u^k + \Gamma^m_{kl}(z^k_1 z^l_1 + z^k_2 z^l_2) - \frac{1}{2}g^{jm}(d\omega)_{jkl}(z^k_1 z^l_2 - z^k_2 z^l_1) = 0. \qquad (26)$$

Cette équation serait identique l'équation d'une application harmonique valeurs dans $\mathcal{N}$ munie de la métrique g_{jk}, en présence d'une forme ω_{jk}, si les termes en a_{jk} et b_{jk} étaient nuls.

Lemme 4 *Les tenseurs a_{jk} et b_{jk} sont nuls si et seulement si $F(y,z) = \frac{1}{2}h_{jk}(y)\overline{z^j}z^k$.*

Preuve D'après (25), $a_{jk} = b_{jk} = 0$ si et seulement si $\frac{\partial^2 F}{\partial z^j \partial z^k} = 0$. Comme F est réel, cette relation entraîne aussi $\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{z^j} \partial \overline{z^k}} = 0$ et donc nécessairement F est de la forme $F(y,z,\overline{z}) = \sum_{j=1}^n A_j(y,z)\overline{z^j} + A_0(y,z) = \sum_{j=1}^n B_j(y,\overline{z})z^j + B_0(y,\overline{z})$. De plus, F doit être homogène de degré 2 en z^j_α, et donc $F(y,z) = \frac{1}{2}\eta_{jk}(y)\overline{z^j}z^k$, où η_{jk} est un tenseur hermitien. Les relations (15) permettent alors de conclure que $\eta_{jk} = h_{jk}$ [1]. *CQFD.*

5 Approches hamiltoniennes

Dans le formalisme hamiltonien classique pour des problèmes variationnels à une variable, lorsque l'hypothèse de Legendre est satisfaite, on remplace les variables $t \in \mathbb{R}$ et $(y,z) \in T\mathcal{N}$ par $t \in \mathbb{R}$ et $(y,p) \in T^\star\mathcal{N}$. L'équivalence entre les deux systèmes de coordonnées repose sur le fait que $p_i = \frac{\partial L}{\partial z^i}(y,z)$ est un difféomorphisme entre $T\mathcal{N}$ et $T^\star\mathcal{N}$. On définit l'hamiltonien sur $\mathbb{R} \times T^\star\mathcal{N}$ par $H(t,y,\frac{\partial L}{\partial z}(t,y,z)) = \frac{\partial L}{\partial z^i}(t,y,z)z^i - L(t,z,y)$. Alors H joue deux rôles: d'une part, lorsque le problème est indépendant du temps, il est une quantité conservée, d'autre part, il dicte la dynamique du problème par les équations de Hamilton. On peut même adopter une description plus symétrique en espace et en temps en considérant sur $T^\star(\mathbb{R} \times \mathcal{N})$ l'hamiltonien $\hat{H}(t,y^1,...,y^n,p_0,p_1,...,p_n) = H(t,y,p) + p_0$. Une façon d'obtenir les équations de Hamilton est d'écrire que la trajectoire $\gamma(t) = (t,y^1(t),...,y^n(t),p_0(t),p_1(t),...,p_n(t))$ est un point critique de la fonctionnelle

$$\mathcal{A} = \int_I p_i(t)dy^i(t) - H(t,y(t),p(t))dt$$

ou encore de

$$\mathcal{A} = \int_I p_i dy^i + p_0 dt,$$

avec la contrainte $\hat{H}(t,y,p_0,p) = 0$. Dans le cas de cette dernière formulation, c'est la contrainte qui dicte la dynamique.

L'idéal serait de pouvoir faire de même pour le calcul des variations à plusieurs variables. Malheureusement les choses ne marchent pas aussi bien. Des constructions partiellement satisfaisantes existent. Nous en présentons deux ici, la théorie de Weyl et celle de Carathéodory. Mais il y en a en réalité une infinité (théories de de Donder, de Boerner...). De plus, les deux rôles joués par l'hamiltonien pour les problèmes à une variable sont en général répartis entre deux objets différents: un hamiltonien scalaire, dont le rôle est dynamique et un hamiltonien tensoriel (le tenseur énergie-impulsion), qui contient les quantités conservées. Dans la suite, nous exposerons les théories de Weyl et de Carathéodory de façon succincte et axiomatique. Pour une

[1] Remarquons que, bien que a_{jk} et b_{jk} soient non nuls en général, on a toujours $(a_{jk} - ib_{jk})\, z^j = 0$. En effet, en dérivant (16) par rapport à z^k, on obtient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^j \partial z^k}(y,z)z^j + \frac{\partial F}{\partial z^k}(y,z) = \frac{\partial F}{\partial z^k}(y,z),$$

d'où, en simplifiant $\frac{\partial^2 F}{\partial z^j \partial z^k}(y,z)z^j = 0$, qui donne cette relation d'aprs (25)

présentation plus approfondie et les liens avec la théorie d'Hamilton-Jacobi, nous recommandons de lire l'ouvrage de H. Rund [Ru] [2].

5.1 Théorie de Weyl

Nous avons juste besoin ici de la condition de Legendre globale. Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.2, cela garantit l'existence d'une application inverse de $z \mapsto \frac{\partial F}{\partial z^j_\alpha}(y,z)$, que nous avons notée $\Psi = \psi_1 + i\psi_2$. Nous définissons alors l'hamiltonien de Weyl $H : T^\star\mathcal{N}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$H(y,p) := p^\alpha_j \psi^j_\alpha(y,p) - F\left(y, \Psi(y,p)\right). \tag{27}$$

Un calcul direct donne

$$\frac{\partial H}{\partial p^\alpha_j}(y,p) = \psi^j_\alpha(y,p) \tag{28}$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial u^j}(y,p) = -\frac{\partial F}{\partial u^j}\left(y, \Psi(y,p)\right). \tag{29}$$

Nous remarquons qu'en substituant $p^\alpha_j = \frac{\partial F}{\partial z^j_\alpha}(y,z)$, avec $z = \Psi(p)$ dans (27), nous obtenons

$$H\left(y, \frac{\partial F}{\partial z}(y,z)\right) = \frac{\partial F}{\partial z^j_\alpha}(y,z) z^j_\alpha - F(y,z) = F(y,z),$$

en vertu de (7). Et donc

$$H(y,p) = F(y, \Psi(y,p)). \tag{30}$$

Grâce à cette identité, nous déduisons immédiatement de l'hypothèse (8) et du Lemme 1 que $\forall (y,p) \in T^\star\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $H(y,\lambda p) = |\lambda|^2 H(y,p)$.

Egalement, en utilisant les relations (17) et (18), on obtient que $H(y,p) = \frac{1}{2}\eta^{jk}(y,p)\overline{p}_j p_k$, où $\eta^{jk}(y,p)$ est défini par $\eta^{jk}(y,p)h_{kl}(y,z) = \delta^j_l$.

De plus, le système d'équations d'Euler-Lagrange $\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial z^j_\alpha}(u,du)\right) = \frac{\partial L}{\partial y^j}(u,du)$ peut être transformé en y ajoutant les relations (28), reliant $\frac{\partial u^j}{\partial t^\alpha}$ à p^α_j. En utilisant aussi (29), cela donne les équations de Hamilton généralisées, comme suit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial u^j}{\partial t^\alpha} & = & \dfrac{\partial H}{\partial p^\alpha_j}(u,p) \\ \dfrac{\partial p^1_j}{\partial t^1} + \dfrac{\partial p^2_j}{\partial t^2} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial y^j}(u,p). \end{array} \right. \tag{31}$$

Nous remarquons que les premières relations entraînent aussi les relations de compatibilité

$$\frac{\partial}{\partial t^1}\left(\frac{\partial H}{\partial p^2_j}(u,p)\right) - \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p^1_j}(u,p)\right) = 0.$$

De plus, pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, $(u,p) : \Omega \longrightarrow T\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ est solution de (31) si et seulement si son graphe $\Gamma = \{(t, u(t), p(t)) \subset \Omega \times T^\star\mathcal{N}^{\mathbb{C}} / t \in \Omega\}$ est un point critique de

[2] voir également dans ce livre les références bibliographiques des auteurs suivants: E. T. Davies, A. Kawaguchi, A. Kawaguchi et Y. Katsurada, A. Kawaguchi et K. Tandai, L. Berwald

$$\int_{\Gamma} p_j^1 du^j \wedge dt^2 + p_j^2 dt^1 \wedge du^j - H(t,u,p) dt^1 \wedge dt^2.$$

5.2 Théorie de Carathéodory-Rund

Dans ce qui suit, nous reprenons et développons le formalisme canonique construit par H. Rund [Ru], [Ru1], dans le but d'interpréter les équations d'Hamilton-Jacobi de Carathéodory (voir le paragraphe 5.3). L'idée est d'utiliser comme variables d'impulsion des quantités ϵ_β^α et π_j^α, pour $\alpha, \beta = 1, 2$ et $j = 1, ..., n$, telles que

$$F(y,z) + w = \begin{vmatrix} \pi_j^1 z_1^j + \epsilon_1^1 & \pi_k^1 z_2^k + \epsilon_2^1 \\ \pi_j^2 z_1^j + \epsilon_1^2 & \pi_k^2 z_2^k + \epsilon_2^2 \end{vmatrix}, \tag{32}$$

et qu'il existe une matrice 2×2 inversible T, telle que

$$\pi = T \frac{\partial F}{\partial z} \text{ et } \epsilon = wT - TH, \tag{33}$$

avec

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1^1 & \dots & \pi_n^1 \\ \pi_1^2 & \dots & \pi_n^2 \end{pmatrix}, \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1^1 & \epsilon_2^1 \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 \end{pmatrix},$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial z_1^1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial z_1^n} \\ \frac{\partial F}{\partial z_2^1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial z_2^n} \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} H_1^1 & H_1^2 \\ H_2^1 & H_2^2 \end{pmatrix}.$$

Ici, w est un paramètre réel (qui n'apparaît pas dans [Ru]), dont le rôle sera éclairci plus tard. Remarquons que si l'on note

$$Z = \begin{pmatrix} z_1^1 & z_2^1 \\ \vdots & \vdots \\ z_1^n & z_2^n \end{pmatrix},$$

on a $H = \frac{\partial F}{\partial z} Z - F \mathbb{1}_2$ et donc (32) entraîne que

$$F(y,z) + w = \det(\pi Z + \epsilon) = \det\left(T \frac{\partial F}{\partial z} Z + wT - TH \right) = \det((F+w)T) = (F+w)^2 \det T.$$

Nous en déduisons que si $F(y,z) + w \neq 0$,

$$(F(y,z) + w) \det T = 1. \tag{34}$$

Réciproquement, il est immédiat que pour tout T qui satisfait (34), si ϵ et π sont définis par (33), alors (32) est vérifié. En excluant le cas $F(y,z) + w = 0$, on en déduit qu'étant donné w, à tout z, on peut associer un couple (ϵ, π) satisfaisant (32) et (33). Cette solution (ϵ, π) n'est pas unique, puisque l'on peut changer T en gT (ce qui revient à changer (ϵ, π) en $(g\epsilon, g\pi)$), pour tout $g \in SL(2, \mathbb{R})$. Donc, dans les variables (ϵ, π), l'ensemble des quantités "observables" [3] est invariant par le groupe de jauge $SL(2, \mathbb{R})$.

[3] c'est à dire les fonctions de (y, z)

5.2.1 Correspondance de Legendre-Carathéodory

Nous allons vérifier que l'on peut remplacer les variables (y, z, w) par (y, ϵ, π). Dans ce qui suit, nous supposerons que $F(y, z) + w \neq 0$. Ce qui précède montre qu'étant donné z, w, l'on peut toujours trouver (ϵ, π) tels que (32) et (33) aient lieu. La réciproque est un peu plus délicate. Commençons par caractériser T en fonction de z, ϵ et π.

Lemme 5 *Si T est solution de (32) et (33), alors*

$$T = \frac{\pi Z + \epsilon}{\det(\pi Z + \epsilon)},$$

ou, de façon équivalente, T^{-1} est la comatrice de $\pi Z + \epsilon$, c'est à dire,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \pi^2_k z^k_2 + \epsilon^2_2 & -(\pi^1_k z^k_2 + \epsilon^1_2) \\ -(\pi^2_j z^j_1 + \epsilon^2_1) & \pi^1_j z^j_1 + \epsilon^1_1 \end{pmatrix} := P = \begin{pmatrix} P^1_1 & P^1_2 \\ P^2_1 & P^2_2 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Preuve A partir de la relation $F\mathbb{1}_2 = \frac{\partial F}{\partial z} Z - H$, nous obtenons

$$(F(y, z) + w)T = T\frac{\partial F}{\partial z} Z - TH + wT = \pi Z + \epsilon,$$

d'où, utilisant (34), $\frac{T}{detT} = \pi Z + \epsilon$. Cela implique $(\det T)^{-1} = \det(\pi Z + \epsilon)$, donc $T = \frac{\pi Z+\epsilon}{\det(\pi Z+\epsilon)}$. La relation (35) s'ensuit. *CQFD.*

A présent, pour trouver z en fonction de ϵ et π, il suffit de résoudre (33) en y substituant T selon (35), c'est à dire résoudre le système

$$\frac{\partial F}{\partial z^j_1}(y, z) = \begin{vmatrix} \pi^1_j & \pi^1_k z^k_2 + \epsilon^1_2 \\ \pi^2_j & \pi^2_k z^k_2 + \epsilon^2_2 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial z^k_2}(y, z) = \begin{vmatrix} \pi^1_j z^j_1 + \epsilon^1_1 & \pi^1_k \\ \pi^2_j z^j_1 + \epsilon^2_1 & \pi^2_k \end{vmatrix}, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} H^1_2(y, z) &= -\begin{vmatrix} \epsilon^1_2 & \pi^1_k z^k_2 + \epsilon^1_2 \\ \epsilon^2_2 & \pi^2_k z^k_2 + \epsilon^2_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi^1_j z^j_2 & \pi^1_k z^k_2 + \epsilon^1_2 \\ \pi^2_j z^j_2 & \pi^2_k z^k_2 + \epsilon^2_2 \end{vmatrix}, \\ H^2_1(y, z) &= -\begin{vmatrix} \pi^1_j z^j_1 + \epsilon^1_1 & \epsilon^1_1 \\ \pi^2_j z^j_1 + \epsilon^2_1 & \epsilon^2_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi^1_j z^j_1 + \epsilon^1_1 & \pi^1_k z^k_1 \\ \pi^2_j z^j_1 + \epsilon^2_1 & \pi^2_k z^k_1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{37}$$

et

$$H^1_1(y, z) = w - \begin{vmatrix} \epsilon^1_1 & \pi^1_k z^k_2 + \epsilon^1_2 \\ \epsilon^2_1 & \pi^2_k z^k_2 + \epsilon^2_2 \end{vmatrix}, \quad H^2_2(y, z) = w - \begin{vmatrix} \pi^1_j z^j_1 + \epsilon^1_1 & \epsilon^1_2 \\ \pi^2_j z^j_1 + \epsilon^2_1 & \epsilon^2_2 \end{vmatrix}. \tag{38}$$

Nous allons voir que,

- sous des hypothèses génériques sur ϵ et π, le système (36) admet une unique solution z
- on peut vérifier qu'alors z est automatiquement solution de (37)
- enfin, il existe un unique w tel que z et w soient solutions de (38).

Auparavant, nous remarquons sur (36), (37) et (38) que z et w ne dépendent que des coefficients

$$A_{j,k} := \left| \begin{array}{cc} \pi_j^1 & \pi_k^1 \\ \pi_j^2 & \pi_k^2 \end{array} \right|, \; A_{j,n+2} := \left| \begin{array}{cc} \pi_j^1 & \epsilon_2^1 \\ \pi_j^2 & \epsilon_2^2 \end{array} \right|, A_{n+1,k} := \left| \begin{array}{cc} \epsilon_1^1 & \pi_k^1 \\ \epsilon_1^2 & \pi_k^2 \end{array} \right| \text{ et } A_{n+1,n+2} := \left| \begin{array}{cc} \epsilon_1^1 & \epsilon_2^1 \\ \epsilon_1^1 & \epsilon_2^2 \end{array} \right|,$$

quantités invariantes par un changement de (ϵ, π) en $(g\epsilon, g\pi)$, pour $g \in SL(2, \mathbb{R})$. C'est pourquoi nous adopterons plutôt ces notations $((A_{jk})_{1\leq j,k\leq n+2}$ formant une matrice antisymétrique $(n+2)\times(n+2))$ et les équations (36), (37), (38) se réécrivent respectivement

$$\frac{\partial F}{\partial z_1^j}(y,z) = A_{j,k} z_2^k + A_{j,n+2}, \; \frac{\partial F}{\partial z_2^k}(y,z) = A_{j,k} z_1^j + A_{n+1,k}, \tag{39}$$

$$H_2^1(y,z) = A_{j,n+2} z_2^j, \; H_1^2(y,z) = A_{n+1,k} z_1^k \tag{40}$$

et

$$H_1^1(y,z) = w - \left(A_{n+1,k} z_2^k + A_{n+1,n+2} \right), \; H_2^2(y,z) = w - \left(A_{j,n+2} z_1^j + A_{n+1,n+2} \right). \tag{41}$$

Résolution de (39). Nous considérons la fonctionnelle

$$W(y,z,\epsilon,\pi) := \left| \begin{array}{cc} \pi_j^1 z_1^j + \epsilon_1^1 & \pi_k^1 z_2^k + \epsilon_2^1 \\ \pi_j^2 z_1^j + \epsilon_1^2 & \pi_k^2 z_2^k + \epsilon_2^2 \end{array} \right| - F(y,z)$$

ou

$$W(y,z,A) := \left(\sum_{j,k=1}^n A_{j,k} z_1^j z_2^k + \sum_{j=1}^n A_{j,n+2} z_1^j + \sum_{k=1}^n A_{n+1,k} z_2^k + A_{n+1,n+2} \right) - F(y,z).$$

Toute solution z de (39) est obtenue en fixant $A := (A_{jk})_{1\leq j,k\leq n+2}$ et en extrémisant $z \longmapsto W(y,z,A)$. En effet, il est immédiat que l'équation d'Euler-Lagrange pour ce problème variationnel est exactement (39). Tout consiste donc à savoir si ce problème variationnel a une unique solution ou non. En général, cela sera vrai pour A variant dans un domaine ouvert. Si tel est le cas, nous noterons

$$\mathcal{Z} : (y,\epsilon,\pi) \text{ ou } (y,A) \longmapsto z,$$

l'application qui, à (y,A), associe la solution z de (39).

Vérification de (40). Si $z = \mathcal{Z}(y,A)$, il vient, en utilisant la définition de H et (39),

$$H_2^1(y,z) = \frac{\partial F}{\partial z_1^j}(y,z) z_2^j = A_{j,k} z_2^j z_2^k + A_{j,n+2} z_2^j = A_{j,n+2} z_2^j,$$

qui coïncide avec la première identité de (40). On vérifie de même l'identité pour H_1^2.

Vérification de (41) et détermination de w. Nous choisissons

$$w = W(y, \mathcal{Z}(y,A), A). \tag{42}$$

En utilisant (39) et (42), nous avons, notant $z = \mathcal{Z}(y, A)$,

$$\begin{aligned}
H_1^1(y,z) &= \frac{\partial F}{\partial z_1^j}(y,z)z_1^j - F(y,z) = A_{j,k}z_1^j z_2^k + A_{j,n+2}z_1^j - F(y,z) \\
&= \Big(A_{j,k}z_1^j z_2^k + A_{j,n+2}z_1^j + A_{n+1,k}z_2^k + A_{n+1,n+2} - F(y,z)\Big) - A_{n+1,k}z_2^k - A_{n+1,n+2} \\
&= w - A_{n+1,k}z_2^k - A_{n+1,n+2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
H_2^2(y,z) &= \frac{\partial F}{\partial z_2^k}(y,z)z_2^k - F(y,z) = A_{j,k}z_1^j z_2^k + A_{n+2,k}z_2^k - F(y,z) \\
&= \Big(A_{j,k}z_1^j z_2^k + A_{j,n+2}z_1^j + A_{n+1,k}z_2^k + A_{n+1,n+2} - F(y,z)\Big) - A_{j,n+2}z_1^j - A_{n+1,n+2} \\
&= w - A_{j,n+2}z_1^j - A_{n+1,n+2}.
\end{aligned}$$

Et nous obtenons ainsi (41).

5.2.2 Equations de Hamilton

Supposant que l'équation $\frac{\partial W}{\partial z}(y,z,\epsilon,\pi) = 0$ a une unique solution $z = \mathcal{Z}(y,\epsilon,\pi)$, nous définissons l'hamiltonien $\mathcal{H}$ par

$$\mathcal{H} : (y,\epsilon,\pi) \longmapsto W(y, \mathcal{Z}(y,\epsilon,\pi), \epsilon, \pi).$$

($\mathcal{H}(y,\epsilon,\pi)$ est aussi égal à w, solution de (41)). Remarquons que nous avons les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y^j}(y,\epsilon,\pi) &= \frac{\partial W}{\partial y^j}(y,\mathcal{Z}(y,\epsilon,\pi),\epsilon,\pi) + \frac{\partial W}{\partial z_\alpha^k}(y,\mathcal{Z}(y,\epsilon,\pi),\epsilon,\pi)\frac{\partial \mathcal{Z}_\alpha^k}{\partial y^j}(y,\epsilon,\pi) \\
&= \frac{\partial W}{\partial y^j}(y,\mathcal{Z}(y,\epsilon,\pi),\epsilon,\pi) = -\frac{\partial F}{\partial y^j}(y,\mathcal{Z}(y,\epsilon,\pi)),
\end{aligned} \tag{43}$$

et en notant

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_1^1 & \mathcal{P}_2^1 \\ \mathcal{P}_1^2 & \mathcal{P}_2^2 \end{pmatrix}(y,\epsilon,\pi) = \begin{pmatrix} \pi_k^2 \mathcal{Z}_2^k(y,\epsilon,\pi) + \epsilon_2^2 & -(\pi_k^1 \mathcal{Z}_2^k(y,\epsilon,\pi) + \epsilon_2^1) \\ -(\pi_j^2 \mathcal{Z}_1^j(y,\epsilon,\pi) + \epsilon_1^2) & \pi_j^1 \mathcal{Z}_1^j(y,\epsilon,\pi)1 + \epsilon_1^1 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

(remarquer qu'alors $W(y,z,\pi,\epsilon) = \mathcal{P}_\alpha^1(y,\epsilon,\pi)\left(\pi_j^\alpha z_1^j + \epsilon_1^\alpha\right) - F(y,z) = \mathcal{P}_\alpha^2(y,\epsilon,\pi)\left(\pi_j^\alpha z_2^j + \epsilon_2^\alpha\right) - F(y,z)$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_j^\alpha}(y,\epsilon,\pi) &= \frac{\partial W}{\partial \pi_j^\alpha}(y,\mathcal{Z}(y,\epsilon,\pi),\epsilon,\pi) + \frac{\partial W}{\partial z_\beta^k}(y,\mathcal{Z}(y,\epsilon,\pi),\epsilon,\pi)\frac{\partial \mathcal{Z}_\beta^k}{\partial \pi_j^\alpha}(y,\epsilon,\pi) \\
&= \frac{\partial W}{\partial \pi_j^\alpha}(y,\mathcal{Z}(y,\pi,\epsilon),\epsilon,\pi) = \mathcal{P}_\alpha^\beta(y,\epsilon,\pi)\mathcal{Z}_\beta^j(y,\epsilon,\pi),
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \epsilon_\beta^\alpha}(y,\epsilon,\pi) &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_\beta^\alpha}(y,\mathcal{Z}(y,\epsilon,\pi),\epsilon,\pi) + \frac{\partial W}{\partial z_\gamma^k}(y,\mathcal{Z}(y,\epsilon,\pi),\epsilon,\pi)\frac{\partial \mathcal{Z}_\gamma^k}{\partial \epsilon_\beta^\alpha}(y,\epsilon,\pi) \\
&= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_\beta^\alpha}(y,\mathcal{Z}(y,\epsilon,\pi),\epsilon,\pi) = \mathcal{P}_\alpha^\beta(y,\epsilon,\pi).
\end{aligned} \tag{46}$$

A présent, nous considérons la fonctionnelle suivante. A toute application (u, ϵ, π) définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, nous associons son graphe $\Sigma := \{(t, u(t), \epsilon(t), \pi(t))/t \in \Omega\}$ et nous posons

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(u,\epsilon,\pi) &= \int_{\Sigma} \left(\pi_j^1 du^j + \epsilon_\alpha^1 dt^\alpha\right) \wedge \left(\pi_k^2 du^k + \epsilon_\beta^2 dt^\beta\right) - \mathcal{H}(u,\epsilon,\pi) dt^1 \wedge dt^2 \\ &= \int_{\Omega} \left(\begin{vmatrix} \pi_j^1(t)\frac{\partial u^j}{\partial t^1}(t) + \epsilon_1^1(t) & \pi_k^1(t)\frac{\partial u^k}{\partial t^2}(t) + \epsilon_2^1(t) \\ \pi_j^2(t)\frac{\partial u^j}{\partial t^1}(t) + \epsilon_1^2(t) & \pi_k^2(t)\frac{\partial u^k}{\partial t^2}(t) + \epsilon_2^2(t) \end{vmatrix} - \mathcal{H}(u(t),\epsilon(t),\pi(t)) \right) dt^1 \wedge dt^2.\end{aligned}$$

Ecrivons les équations satisfaites par les points critiques de cette fonctionnelle. Pour cela, nous noterons

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_1^1(t) & \hat{P}_2^1(t) \\ \hat{P}_1^2(t) & \hat{P}_2^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_k^2(t)\frac{\partial u^k}{\partial t^2}(t) + \epsilon_2^2(t) & -(\pi_k^1(t)\frac{\partial u^k}{\partial t^2}(t) + \epsilon_2^1(t)) \\ -(\pi_j^2(t)\frac{\partial u^j}{\partial t^1}(t) + \epsilon_1^2(t)) & \pi_j^1(t)\frac{\partial u^j}{\partial t^1}(t) + \epsilon_1^1(t) \end{pmatrix}, \tag{47}$$

Variations par rapport à u:

$$\frac{\partial\left(\hat{P}_\beta^\alpha \pi_j^\beta\right)}{\partial t^\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y^j}. \tag{48}$$

Variations par rapport à π:

$$\hat{P}_\alpha^\beta \frac{\partial u^j}{\partial t^\beta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_j^\alpha}. \tag{49}$$

Variations par rapport à ϵ:

$$\hat{P}_\alpha^\beta = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \epsilon_\beta^\alpha}. \tag{50}$$

En comparant (45) avec (49) et (46) avec (50), on obtient respectivement $\mathcal{P}_\alpha^\beta(y,\epsilon,\pi)\mathcal{Z}_\beta^j(y,\epsilon,\pi) = \hat{P}_\alpha^\beta \frac{\partial u^j}{\partial t^\beta}$ et $\mathcal{P}_\alpha^\beta(y,\epsilon,\pi) = \hat{P}_\alpha^\beta$. De ces deux équations, il vient aisément

$$\frac{\partial u^k}{\partial t^\alpha} = \mathcal{Z}_\alpha^k(u(t),\epsilon(t),\pi(t)).$$

Cela entraîne que $\hat{P}_\beta^\alpha \pi_j^\beta = \frac{\partial F}{\partial z_\alpha^j}$. En reportant cela dans (48) et en utilisant (43), on retrouve que u est solution de l'équation d'Euler-Lagrange (20).

Nous pouvons aussi écrire que l'action est stationnaire sous l'effet de variations de t, vue comme variable indépendante (il faut penser $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ comme l'intégrale d'une 2-forme sur une surface plongée dans l'espace des coordonnées (t, y, ϵ, π)). Par exemple,

$$0 = \delta\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(\delta t^1) = \int_{\Sigma} \delta t^1 d\left(\epsilon_1^2(\pi_j^1 du^j + \epsilon_\alpha^1 dt^\alpha) - \epsilon_1^1(\pi_k^2 du^k + \epsilon_\beta^2 dt^\beta) + \mathcal{H} dt^2\right).$$

En calculant, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\mathcal{H}(u(t),\epsilon(t),\pi(t))\delta_\beta^\alpha - \hat{P}_\gamma^\alpha(t)\epsilon_\beta^\gamma(t)\right) = 0. \tag{51}$$

Cette équation exprime la conservation du tenseur énergie-impulsion $\frac{\partial H^\alpha_\beta}{\partial t^\alpha} = 0$, en vertu de (38).

Le système d'équations (48), (49), (50) et (51) constitue un analogue des équations classiques de Hamilton, (t, y) étant les variables de temps et d'espace et (ϵ, π) celles d'énergie et d'impulsion. Une forme différente est obtenue si, exploîtant l'invariance par transformation de jauge, l'on choisit (ϵ, π) tels que

$$\frac{\partial \hat{P}^\alpha_\beta}{\partial t^\alpha} = 0. \tag{52}$$

Pour voir cela, notons $\phi^\alpha := \pi^\alpha_j du^j + \epsilon^\alpha_\beta dt^\beta$ et supposons que $\phi^1 \wedge \phi^2 \neq 0$. Alors, d'après un théorème de J. Moser [Mo] il existe des coordonnées sur Ω qui trivialisent la forme symplectique $\phi^1 \wedge \phi^2$, c'est à dire deux fonctions $f^1, f^2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\phi^1 \wedge \phi^2 = df^1 \wedge df^2$. Soit $g : \Omega \longrightarrow SL(2, \mathbb{R})$ l'unique fonction telle que $d\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}$. En remplaçant (ϵ, π) par $(\tilde{\epsilon}, \tilde{\pi}) := (g\epsilon, g\pi)$, on obtient des variables décrivant le même problème lagrangien, mais telles que $d\tilde{\phi}^1 = d\tilde{\phi}^2 = 0$, ce qui équivaut à (52).

Dans un tel choix de coordonnées , les équations (48), (49), (50) et (51) donnent

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\partial \left(\hat{P}^\beta_\gamma(t)\epsilon^\gamma_\alpha(t) - \mathcal{H}(u(t), \epsilon(t), \pi(t))\delta^\beta_\alpha \right)}{\partial t^\beta} = 0, & \dfrac{\partial \left(\hat{P}^\beta_\alpha(t)\pi^\alpha_j(t) \right)}{\partial t^\beta} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y^j} \\ \dfrac{\partial \left(\hat{P}^\beta_\alpha(t)t^\gamma \right)}{\partial t^\beta} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \epsilon^\alpha_\gamma}, & \dfrac{\partial \left(\hat{P}^\beta_\alpha(t)u^j(t) \right)}{\partial t^\beta} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\alpha_j} \end{array} \tag{53}$$

5.2.3 Formulation avec contrainte

Le paramètre w, introduit initialement pour construire la correspondance de Legendre-Carathéodory ne joue aucun rôle dans la dynamique. Nous pouvons imposer que w soit égal à une constante arbitraire C et restreindre la correspondance à $\{(y, z, C)/(y, z) \in T\mathcal{N}^{\mathbb{C}}\}$. L'image de cette correspondance est alors l'hypersurface

$$\mathcal{H}^C := \{(y, \epsilon, \pi)/\mathcal{H}(y, \epsilon, \pi) = C\}.$$

Le problème variationnel est alors simplement obtenu en travaillant dans l'ensemble des surfaces $\Sigma = \{(t, u(t), \epsilon(t), \pi(t))/t \in \Omega\}$ plongées dans $\Omega \times \mathcal{H}^C$ avec la fonctionnelle

$$\mathcal{A}(u, \epsilon, \pi) = \int_\Sigma \left(\pi^1_j du^j + \epsilon^1_\alpha dt^\alpha \right) \wedge \left(\pi^2_k du^k + \epsilon^2_\beta dt^\beta \right).$$

Les points critiques de $\mathcal{A}$ sous la contrainte $\Sigma \subset \Omega \times \mathcal{H}^C$ satisfont aux équations suivantes (avec la notation (47))

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\partial \left(\hat{P}^\beta_\gamma(t)\epsilon^\gamma_\alpha(t) \right)}{\partial t^\beta} = 0, & \dfrac{\partial \left(\hat{P}^\beta_\alpha(t)\pi^\alpha_j(t) \right)}{\partial t^\beta} = -\mu\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y^j} \\ \hat{P}^\beta_\alpha(t)\dfrac{\partial t^\gamma}{\partial t^\beta} = \mu\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \epsilon^\alpha_\gamma}, & \hat{P}^\beta_\alpha(t)\dfrac{\partial u^j(t)}{\partial t^\beta} = \mu\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\alpha_j}, \end{array} \tag{54}$$

où μ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte. En utilisant (45) et (46), on en déduit

$$\mu \mathcal{P}_\alpha^\beta(u,\epsilon,\pi)\mathcal{Z}_\beta^j(u,\epsilon,\pi) = \hat{P}_\alpha^\beta \frac{\partial u^j}{\partial t^\beta} \tag{55}$$

et

$$\mu \mathcal{P}_\alpha^\beta(u,\epsilon,\pi) = \hat{P}_\alpha^\beta. \tag{56}$$

En substituant (56) dans (55), on obtient $\hat{P}_\alpha^\beta \frac{\partial u^j}{\partial t^\beta} = \hat{P}_\alpha^\beta \mathcal{Z}_\beta^j(u,\epsilon,\pi)$, d'où l'on tire $\frac{\partial u^j}{\partial t^\beta} = \mathcal{Z}_\beta^j(u,\epsilon,\pi)$. En reportant dans (56), on conclut que $\mu = 1$. Le système (54) conduit donc à

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\partial\left(\hat{P}_\gamma^\beta(t)\epsilon_\alpha^\gamma(t)\right)}{\partial t^\beta} = 0, & \dfrac{\partial\left(\hat{P}_\alpha^\beta(t)\pi_j^\alpha(t)\right)}{\partial t^\beta} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y^j} \\ \hat{P}_\alpha^\beta(t)\dfrac{\partial t^\gamma}{\partial t^\beta} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \epsilon_\gamma^\alpha}, & \hat{P}_\alpha^\beta(t)\dfrac{\partial u^j(t)}{\partial t^\beta} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_j^\alpha}. \end{array} \tag{57}$$

5.2.4 Propriétés du hamiltonien pour un problème invariant par transformation conforme

Nous notons $\vec{A} := (A_{j,k})_{1\leq j,k\leq n}$. Il est possible de réécrire la fonctionnelle W sous la forme

$$W(y,z,A) = -\frac{i}{2}\vec{A}_{jk}\overline{z}^j z^k + A_{j,n+2}z_1^j + A_{n+1,k}z_2^k + A_{n+1,n+2} - F(y,z).$$

Donc, les équations (39), à résoudre pour trouver z en fonction de y et de A, sont équivalentes à la relation suivante

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}^j} = -\frac{\partial F}{\partial \overline{z}^j} - \frac{i}{2}\vec{A}_{jk}z^k + \frac{1}{2}\left(A_{j,n+2} + iA_{n+1,j}\right) = 0. \tag{58}$$

En multipliant cette équation par $\overline{z}^j$, en sommant et en utilisant (16), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left[-F(y,z) - \tfrac{i}{2}\vec{A}_{jk}\overline{z}^j z^k + \tfrac{1}{2}\left(A_{j,n+2}z_1^j + A_{n+1,j}z_2^j\right)\right] + \tfrac{i}{2}\left[A_{n+1,j}z_1^j - A_{j,n+2}z_2^j\right] &= \\ -\frac{\partial F}{\partial \overline{z}^j}\overline{z}^j - \frac{i}{2}\vec{A}_{jk}\overline{z}^j z^k + \frac{1}{2}\left(A_{j,n+2} + iA_{n+1,j}\right)\overline{z}^j &= 0. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$A_{n+1,j}z_1^j - A_{j,n+2}z_2^j = 0 \tag{59}$$

et en reportant dans l'expression précédente de $W(y,z,A)$,

$$\mathcal{H}(y,A) = \frac{1}{2}\left(A_{j,n+2}z_1^j + A_{n+1,j}z_2^j\right) + A_{n+1,n+2}. \tag{60}$$

Nous pouvons déduire du Lemme 1 et de (58) que, $\vec{A}_{jk}$ étant donné, z est une fonction homogène complexe de degré 1 de $A_{j,n+2} + iA_{n+1,j}$, id est (notant $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 + i\mathcal{Z}_2$)

$$\mathcal{Z}(y,\vec{A},\lambda(A_{j,n+2} + iA_{n+1,j})) = \lambda\mathcal{Z}(y,\vec{A},A_{j,n+2} + iA_{n+1,j}),$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$; (60) entraîne alors que $\mathcal{H}(y,z,A) = \tilde{\mathcal{H}}(y,\vec{A},A_{j,n+2}+iA_{n+1,j}) + A_{n+1,n+2}$, où $\tilde{\mathcal{H}}$ est tel que

$$\tilde{\mathcal{H}}(y,\vec{A},\lambda(A_{j,n+2}+iA_{n+1,j})) = |\lambda|^2\tilde{\mathcal{H}}(y,\vec{A},A_{j,n+2}+iA_{n+1,j}).$$

Dans les variables (ϵ,π), cela signifie que

$$\mathcal{H}(y,\lambda(\epsilon_1^\alpha + i\epsilon_2^\alpha),\pi) = |\lambda|^2\mathcal{H}(y,\epsilon_1^\alpha + i\epsilon_2^\alpha,\pi).$$

5.2.5 Le cas hermitien

A titre d'exemple, nous examinons ce qui se passe lorsque $F(y,z) = \frac{1}{2}h_{jk}(y)\overline{z^j}z^k$, où $h_{jk}(y) = g_{jk}(y) - i\omega_{jk}(y)$ est un tenseur métrique hermitien. Etudions d'abord la correspondance de Legendre-Carathéodory. Nous avons alors l'expression suivante pour W

$$W(y,z,A) = -\frac{1}{2}\left[g_{jk} - i\left(\omega_{jk} - \vec{A}_{jk}\right)\right]\overline{z}^j z^k + A_{j,n+2}z_1^j + A_{n+1,k}z_2^k + A_{n+1,n+2}.$$

Alors les équations (39) sont équivalentes à

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}^j} = -\frac{1}{2}\left(h_{jk} + i\vec{A}_{jk}\right)z^k + \frac{1}{2}\left(A_{j,n+2} + iA_{n+1,j}\right) = 0.$$

Et le problème est donc de trouver z, solution de

$$h^\star_{jk}z^k = A_{j,n+2} + iA_{n+1,j}, \qquad (61)$$

avec $h^\star_{jk} := h_{jk} + i\vec{A}_{jk}$. Cette équation a une unique solution si et seulement si $\det h^\star_{jk} \neq 0$.

Remarque 2 *Il est possible d'écrire tout le système (39), (40), (41) sous une forme condensée, de la manière suivante. Nous notons*

$$\zeta_1 := \begin{pmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_1^n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+2}, \zeta_2 := \begin{pmatrix} z_2^1 \\ \vdots \\ z_2^n \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+2}, \zeta := \zeta_1 + i\zeta_2 \in \mathbb{C}^{n+2}.$$

Alors $W(y,z,A) = -\frac{i}{2}A_{jk}\overline{\zeta}^j\zeta^k - F(y,z)$ *et (39), (40), (41) est équivalent à*

$$G\zeta = 0,$$

où

$$G := \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & w\mathbb{1}_2 - {}^tH \end{pmatrix} + iA = \begin{pmatrix} h^\star_{11} & \dots & h^\star_{1n} & iA_{1,n+1} & iA_{1,n+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ h^\star_{n1} & \dots & h^\star_{nn} & iA_{n,n+1} & iA_{n,n+2} \\ iA_{n+1,1} & \dots & iA_{n+1,n} & w - H_1^1 & -H_1^2 + iA_{n+1,n+2} \\ iA_{n+2,1} & \dots & iA_{n+2,n} & -H_2^1 + iA_{n+2,n+1} & w - H_2^2 \end{pmatrix}.$$

Ici, h_{jk} *et* A *sont donnés et* z*,* w *et* H *sont les inconnues.*

Dans cette situation, nous pouvons expliciter d'avantage $\mathcal{H}$: notant $K_{\vec{A}}$ l'inverse de $h^\star = h + i\vec{A}$, c'est à dire tel que

$$K_{\vec{A}}^{jk}\left(h_{kl} + i\vec{A}_{kl}\right) = \delta_l^j,$$

nous déduisons de (61)

$$z^j = K_{\vec{A}}^{jk}\left(A_{k,n+2} + iA_{n+1,k}\right),$$

et en reportant dans (60) (exploîtant (59)),

$$\mathcal{H}(y,A) = \frac{1}{2}K_{\vec{A}}^{jk}\left(A_{j,n+2} - iA_{n+1,j}\right)\left(A_{k,n+2} + iA_{n+1,k}\right) + A_{n+1,n+2}. \tag{62}$$

5.2.6 Une généralisation

On peut introduire, à la place des variables ϵ, π, une famille de variables $\epsilon^{(J)} = \epsilon_\beta^{(J)\alpha}$ et $\pi^{(J)} = \pi_j^{(J)\alpha}$, où $J = 1, ..., N$, pour un certain entier N. On remplace alors la définition précédente de W par

$$W(y,z,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)}) := \sum_{J=1}^N \left| \begin{array}{cc} \pi_j^{(J)1} z_1^j + \epsilon_1^{(J)1} & \pi_k^{(J)1} z_2^k + \epsilon_2^{(J)1} \\ \pi_j^{(J)2} z_1^j + \epsilon_1^{(J)2} & \pi_k^{(J)2} z_2^k + \epsilon_2^{(J)2} \end{array} \right| - F(y,z).$$

A y fixé, les variables (z,w) sont liées aux variables $(\epsilon^{(J)},\pi^{(J)})$ de façon telle que z soit la solution $\mathcal{Z}(y,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)})$ de $\frac{\partial W}{\partial z}(y,z,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)}) = 0$ et $w = W(y,\mathcal{Z}(y,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)}),\epsilon^{(J)},\pi^{(J)})$. L'analyse de cette correspondance de Legendre-Carathéodory est identique à ce qui précède, il suffit de prendre comme nouvelle définition de $(A_{jk})_{1\leq j,k\leq n+2}$:

$$A_{j,k} := \sum_{J=1}^N \left| \begin{array}{cc} \pi_j^{(J)1} & \pi_k^{(J)1} \\ \pi_j^{(J)2} & \pi_k^{(J)2} \end{array} \right|, \quad A_{j,n+2} := \sum_{J=1}^N \left| \begin{array}{cc} \pi_j^{(J)1} & \epsilon_2^{(J)1} \\ \pi_j^{(J)2} & \epsilon_2^{(J)2} \end{array} \right|,$$
$$A_{n+1,k} := \sum_{J=1}^N \left| \begin{array}{cc} \epsilon_1^{(J)1} & \pi_k^{(J)1} \\ \epsilon_1^{(J)2} & \pi_k^{(J)2} \end{array} \right| \text{ et } A_{n+1,n+2} := \sum_{J=1}^N \left| \begin{array}{cc} \epsilon_1^{(J)1} & \epsilon_2^{(J)1} \\ \epsilon_1^{(J)2} & \epsilon_2^{(J)2} \end{array} \right|.$$

Il ressort de l'analyse faite que génériquement, à tout $(\epsilon^{(J)},\pi^{(J)})$, correspond un unique (z,w). De plus, $\mathcal{Z}(y,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)})$ est maintenant une fonction invariante par le groupe des transformations symplectiques de $\mathbb{R}^{2N}$, préservant la 2-forme $dx^{(1)1}\wedge dx^{(1)2} + ... + dx^{(N)1}\wedge dx^{(N)2}$. On définit ainsi $\mathcal{H}(y,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)}) = W(y,\mathcal{Z}(y,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)}),\epsilon^{(J)},\pi^{(J)})$.

Les solutions du problème variationnel initial peuvent être obtenues comme suit. Nous associons à chaque application $(u,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)})$ son graphe $\Sigma := \{(t,u(t),\epsilon^{(J)}(t),\pi^{(J)}(t))/t\in\Omega\}$ et nous utilisons l'un des deux problèmes variationnels suivants

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(u,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)}) = \int_\Sigma \sum_{J=1}^N \left(\pi_j^{(J)1}du^j + \epsilon_\alpha^{(J)1}dt^\alpha\right)\wedge\left(\pi_k^{(J)2}du^k + \epsilon_\beta^{(J)2}dt^\beta\right) - \mathcal{H}(u,\pi^{(J)},\epsilon^{(J)})dt^1\wedge dt^2;$$

ou bien

$$\mathcal{A}(u,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)}) = \int_\Sigma \sum_{J=1}^N \left(\pi_j^{(J)1}du^j + \epsilon_\alpha^{(J)1}dt^\alpha\right) \wedge \left(\pi_k^{(J)2}du^k + \epsilon_\beta^{(J)2}dt^\beta\right),$$

avec la contrainte $\mathcal{H}(y,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)}) = C$. Notant

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_1^{(J)1} & \hat{P}_2^{(J)1} \\ \hat{P}_1^{(J)2} & \hat{P}_2^{(J)2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_k^{(J)2}\frac{\partial u^k}{\partial t^2} + \epsilon_2^{(J)2} & -(\pi_k^{(J)1}\frac{\partial u^k}{\partial t^2} + \epsilon_2^{(J)1}) \\ -(\pi_j^{(J)2}\frac{\partial u^j}{\partial t^1} + \epsilon_1^{(J)2}) & \pi_j^{(J)1}\frac{\partial u^j}{\partial t^1} + \epsilon_1^{(J)1} \end{pmatrix},$$

on obtient, pour les points critique de $\mathcal{A}$ sous la contrainte $\mathcal{H}(y,\epsilon^{(J)},\pi^{(J)}) = C$, le système d'équations d'Euler-Lagrange suivant

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\partial}{\partial t^\beta}\left(\displaystyle\sum_{J=1}^N \hat{P}_\gamma^{(J)\beta}(t)\epsilon_\alpha^\gamma(t)\right) = 0, & \dfrac{\partial}{\partial t^\beta}\left(\displaystyle\sum_{J=1}^N \hat{P}_\alpha^{(J)\beta}(t)\pi_j^\alpha(t)\right) = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial y^j} \\ \hat{P}_\alpha^{(J)\beta}(t) = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\epsilon_\beta^{(J)\alpha}}, & \hat{P}_\alpha^{(J)\beta}(t)\dfrac{\partial u^j}{\partial t^\beta}(t) = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_j^{(J)\alpha}}, \end{array} \tag{63}$$

analogue aux équations de Hamilton.

Il semble intéressant d'essayer de comprendre les propriétés de ce genre de problème. On peut observer que dans le cas où $N = 1$, qui correspond au cas où A est de rang deux, à une valeur (y,z,w) est associée, via la correspondance de Legendre-Carathéodory, une famille $\{(y,g\epsilon,g\pi)/g \in SL(2,\mathbb{R})$, mais dans le cas où $N > 1$, A peut être de n'importe quel rang, compris entre 2 et $2N$ et, une même valeur (y,z,w) correspond à plusieurs familles de valeurs de $(\epsilon^{(J)},\pi^{(J)})$, selon le rang de A. Cela rappelle une situation bien connue en mécanique quantique: l'espace des états en mécanique quantique est plus gros que l'espace des états de la mécanique classique et autorise la superpositions d'états quantiques purs.

5.3 Equations d'Hamilton-Jacobi

Historiquement, la démarche de Carathéodory fut de construire une généralisation de l'équation d'Hamilton-Jacobi pour les problèmes variationnels à plusieurs variables, ce qui l'a amené assez naturellement à définir l'hamiltonien $\mathcal{H}$. Plus tard H. Rund a écrit un système d'équations canoniques associées à cet hamiltonien. C'est pourquoi, il me semble intéressant de rappeler les équations d'Hamilton-Jacobi pour les différentes théories que nous avons rencontrées.

Considérons d'abord un problème variationnel à une variable. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $L : I \times U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un lagrangien satisfaisant la condition de Legendre. Nous cherchons une fonction $S : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $\forall (t,y,z) \in I \times U \times \mathbb{R}^n$,

$$L(t,y,z) \geq \frac{\partial S}{\partial y^j}(t,y)z^j + \frac{\partial S}{\partial t}(t,y), \tag{64}$$

avec égalité pour un certain $z = \psi(t,y)$:

$$L(t,y,\psi(t,y)) = \frac{\partial S}{\partial y^j}(t,y)\psi^j(t,y) + \frac{\partial S}{\partial t}(t,y). \tag{65}$$

ψ est appelé *champ de Mayer* [4]. En particulier, pour tout $(t,y) \in I \times U$ fixé, $\psi(t,y)$ est un

[4]noter que pour toute application $u : I \longrightarrow U$, $\frac{\partial S}{\partial y^j}(t,u(t))\frac{\partial u^j}{\partial t}(t) + \frac{\partial S}{\partial t}(t,u(t)) = \frac{d}{dt}\left(S(t,u(t))\right)$

minimum de $z \longmapsto L(t,y,z) - \frac{\partial S}{\partial y^j}(t,y)z^j + \frac{\partial S}{\partial t}(t,y)$, ce qui entraîne

$$\frac{\partial L}{\partial z^j}(t,y,\psi(t,y)) = \frac{\partial S}{\partial y^j}(t,y). \tag{66}$$

Cette relation a la conséquence que

$$H\left(t,y,\frac{\partial S}{\partial y^j}(t,y)\right) = \frac{\partial L}{\partial z^j}(t,y,\psi(t,y))\psi^j(t,y) - L(t,y,\psi(t,y)). \tag{67}$$

Maintenant, en substituant (66) dans (65), on obtient

$$L(t,y,\psi(t,y)) = \frac{\partial L}{\partial z^j}(t,y,\psi(t,y))\psi^j(t,y) + \frac{\partial S}{\partial t}(t,y).$$

Cette dernière relation signifie exactement, grâce à (67) que S est solution de

$$H\left(t,y,\frac{\partial S}{\partial y^j}(t,y)\right) + \frac{\partial S}{\partial t}(t,y) = 0, \tag{68}$$

l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Une équation analogue pour la théorie de Weyl s'obtient comme suit. Nous partons de $L : \Omega \times U \times \mathbb{R}^{mn}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$) satisfaisant la condition de Legendre et nous cherchons $S : \Omega \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que, $\forall (t,y,z) \in \Omega \times U \times \mathbb{R}^{mn}$,

$$L(t,y,z) \geq \frac{\partial S^\alpha}{\partial y^j}(t,y)z^j_\alpha + \frac{\partial S^\alpha}{\partial t^\alpha}(t,y), \tag{69}$$

avec égalité pour un certain $z = \psi(t,y)$. Par le même raisonnement, on trouve comme condition nécessaire et suffisante sur S:

$$H\left(t,y,\frac{\partial S^\alpha}{\partial y^j}(t,y)\right) + \frac{\partial S^\alpha}{\partial t^\alpha}(t,y) = 0. \tag{70}$$

Enfin, la théorie de Carathédory correspond au problème suivant: trouver $S : \Omega \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que, $\forall (t,y,z) \in \Omega \times U \times \mathbb{R}^{mn}$,

$$L(t,y,z) \geq \det\left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial y^j}(t,y)z^j_\beta + \frac{\partial S^\alpha}{\partial t^\beta}(t,y)\right), \tag{71}$$

avec égalité pour $z = \psi(t,y)$. On constate alors que $\pi^\alpha_j = \frac{\partial S^\alpha}{\partial y^j}(t,y)$, $\epsilon^\alpha_\beta = \frac{\partial S^\alpha}{\partial t^\beta}(t,y)$ forment une solution de (36), (37) et (38) avec $z = \psi(t,y)$ et $w = 0$. Cette dernière condition $w = 0$ se transcrit en l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\mathcal{H}\left(t,y,\frac{\partial S^\alpha}{\partial t^\beta}(t,y),\frac{\partial S^\alpha}{\partial y^j}(t,y)\right) = 0. \tag{72}$$

On peut envisager une généralisation sur des familles de N fonctions $S^{(J)} : \Omega \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, pour $J = 1, ..., N$, à partir du formalisme proposé en 5.2.6.

6 Références

[BCh1] D. Bao, S.S. Chern, *On a notable connection in Finsler geometry*, Houston J. Math. 19 (1993), 135-180.

[BCh2] D. Bao, S.S. Chern, *A note on the Gauss-Bonnet theorem for Finsler spaces*, Ann. Math. 143 (1996), 233-252.

[BChS] D. Bao, S.S. Chern, Z. Shen, *Finsler geometry*, (proceedings of the joint summer research conference om Finsler geometry) Cont. Math., vol. 196, Amer. Math. Soc..

[Br] R. Bryant, *Finsler surfaces with prescribed curvature conditions*, prépublication, à paraître dans les Aisenstadt lectures de R. Bryant, voir *http://www.math.duke.edu/faculty/bryant/*

[Ca] C. Carathéodory, *Calculus of variations and partial differential equations of first order*, Parts I, II, Holden-Day, San Francisco (1967), traduction de *Variationsrechnung und partielle differentialgleichungen erster Ordnung*, Teubner, Leipzig und Berlin (1935).

[Cn] E. Cartan, *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire*, Actualités scientifiques 72, Paris (1933).

[Ch] S.S. Chern, *Finsler geometry is just Riemannian geometry without the quadratic restriction*, Notices of the AMS, September 1996, 959-963.

[Fo] P. Foulon, *Géométrie des équation différentielles du second ordre*, Ann. Inst. Henri Poincaré 45 (1) (1986), 1-28.

[GiHi] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of variations II*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaft 311, Springer 1996.

[Hé] F. Hélein, *Applications harmoniques, lois de conservation et repères mobiles*, Diderot éditeur, Paris 1996; or *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, Diderot éditeur, Paris 1997.

[HK] F. Hélein, J. Kouneiher, *Hamiltonian formalism with several variables and quantum field theory, Part I*, math-ph/0004020 et *Finite dimensional Hamiltonian formalism for gauge and field theories*, math-ph/0010036.

[Ma] D. H. Martin, *Canonical variables and geodesic fields for the calculus of variations of multiple integrals in parametric form*, Math. Z. 104 (1968), 16-27.

[Mo] J. Moser, *On the volume elements of a manifold*, Trans. Am. Math. Soc. 120 (1956), 286-294.

[Ru] H. Rund, *The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations, its role in Mathematics and Physics*, Krieger Pub. 1973 (nouvelle édition avec un appendice supplémentaire).

[Ru1] H. Rund, *A canonical formalism for multiple integral problems in the calculus of variations*, Aeq. Math. 3 (1968), 44-63.